Нелинейные граничные задачи, вып. 13, 2003, с.43-55.

СИСТЕМИ ПАРАБОЛІЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ВИРОДЖЕННЯМ

© Олег Бугрій

Львів, Україна

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $T \in (0,+\infty)$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$.

Розглянемо задачу про відшукання функції u з класу $u \in U_1(Q_{t_0,T}) \cap C([t_0,T];H)$ для довільного $t_0 \in (0,T)$, $u(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$, яка є розв'язком варіаційної нерівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[(\Phi v_t, v-u) + \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij} u_{x_i}, v_{x_j} - u_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n} (B_i u_{x_i}, v-u) + (G\widetilde{u} + Cu - F, v-u) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\Phi_t(v-u), v-u) \Big] dxdt \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_t} (\Phi(v-u), v-u) dx \Big|_{t_1}^{t_2}, \qquad (1)$$

для довільних $t_1, t_2 \in (0,T]$, $t_1 < t_2$ для довільної функції $v \in C((0,T];H)$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$, $v \in W_{t_0,T}$ для довільного $t_0 \in (0,T)$, де $u = \mathrm{colon}(u_1,..,u_N)$, $F = \mathrm{colon}(F_1,..,F_N)$, $N \in \mathbb{N}$; Φ, A_{ij}, B_i, $i,j = \overline{1,n}$, C, G – квадратні матриці розміру $N \times N$, $G = \mathrm{diag}(g_1,\ldots,g_N)$, Φ – симетрична матриця, яка певним чином вироджується при $t = 0$, $\widetilde{u} = \mathrm{colon}(|u_1|^{q(x)-2}u_1,..,|u_N|^{q(x)-2}u_N)$; K – опукла замкнена множина в V, яка містить нульовий елемент, $V = X \cap [L^{q(x)}(\Omega)]^N$, $q = q(x)$ – деяка функція,
X – замкнений підпростір, $[H_0^1(\Omega)]^N \hookrightarrow X \hookrightarrow [H^1(\Omega)]^N$, де символ $\hookrightarrow$ означає неперервне вкладення, $H = [L^2(\Omega)]^N$, $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$,

$$U_1(Q_{t_0,T}) = L^2(t_0,T;X) \cap [L^{q(x)}(Q_{t_0,T})]^N, \; W_{t_0,T} = \{w \in U_1(Q_{t_0,T}) : w_t \in [U_1(Q_{t_0,T})]^*\},$$

$$||z;X|| = \sum_{i=1}^{n} ||z_{x_i};H|| + ||z;H||, \;\; ||v;V|| = ||v;X|| + ||v;[L^{q(x)}(\Omega)]^N||,$$

$$||u;U_1(Q_{t_0,T})|| = ||u;L^2(t_0,T;X)|| + ||u;[L^{q(x)}(Q_{t_0,T})]^N||, \;\; t_0 \in [0,T);$$

$(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^N$.

Норму банахового простору B позначатимемо $||\cdot;B||$, а спряжений до B простір – B^*. Розглядатимемо $u = u(x,t)$, як функцію, яка кожному моменту часу t ставить у відповідність функцію змінної x: $u(t) = u(\cdot,t)$. Позначимо через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярний добуток між V^* і V.

Як видно з (1), ми стикаємося тут з просторами функцій, інтегрованих зі степенем, який теж є функцією. Так в якості $q(x)$ можна взяти: $q(x) \equiv p_1$ для $x \in \Omega_1$ і $q(x) \equiv p_2$ для $x \in \Omega_2$, $1 < q_1 < q_2 < +\infty$, де $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. В статті [1] були введені узагальнені простори Лебега $L^{q(x)}(\Omega)$ та Соболева $W^{1,q(x)}(\Omega)$, $W_0^{1,q(x)}(\Omega)$ таких функцій. Позначимо через $\mathcal{P}(\Omega)$ множину всіх вимірних функцій $p : \Omega \to (1, +\infty)$. Для деякої функції v визначимо функціонал $\rho_q(\cdot, \Omega)$ рівністю $\rho_q(v, \Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{q(x)} dx$. Узагальненим простором Лебега називають простір

$$L^{q(x)}(\Omega) = \{ v \ : \ \rho_q(v/\lambda, \Omega) < +\infty \text{ для деякого } \lambda > 0\}.$$

В [1] доведено, що $L^{q(x)}(\Omega)$ є банаховим простором з нормою

$$||v; L^{q(x)}(\Omega)|| = \inf\{\lambda > 0 \ : \ \rho_q(v/\lambda, \Omega) \leqslant 1\}.$$

Оскільки ці простори не є добре відомими, то наведемо деякі їхні властивості. Надалі припускатимемо, що $q \in \mathcal{P}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ і виконується умова

$$1 < q_1 = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} q(x) \leqslant q(x) \leqslant q_2 = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} q(x) < +\infty. \qquad (2)$$

При наших припущеннях на $q(x)$ та Ω з [1] випливає, що: 1) виконується узагальнена нерівність Гельдера, тобто, для довільних $f \in L^{q(x)}(\Omega)$, $g \in L^{q'(x)}(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant r_q ||f; L^{q(x)}(\Omega)|| \cdot ||g; L^{q'(x)}(\Omega)||, \ \ \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1, \ \ x \in \Omega,$$

де $r_q \in (0, +\infty)$ – стала, що залежить тільки від q і від Ω; 2) $L^{q(x)}(\Omega)$ – сепарабельний та рефлексивний простір; 3) $[L^{q(x)}(\Omega)]^* = L^{q'(x)}(\Omega)$; 4) якщо $q \in \mathcal{P}(\Omega)$ і $p(x) \leqslant q(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, то $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$; 5) $L^{q(x)}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$.

З [1] відомо , що $L^{q(x)}(\Omega)$ є певним узагальненням просторів Орліча. Нехай $M : \Omega \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ – невід'ємна вимірна функція така, що для майже всіх $x \in \Omega$ функція $M(x, \cdot)$ є напівнеперервна знизу, випукла, парна і задовольняє умову $\lim_{u\to 0} M(x, u) = M(x, 0) = 0$. Простором Орліча – Мусіляка (Orlicz – Musielak) називають множину $L^M(\Omega)$ тих функцій f на Ω, що $\int_\Omega M(x, \lambda f(x))dx < \infty$ для деякого $\lambda > 0$ ([1, с. 594]). Тоді $L^{q(x)}(\Omega) = L^M(\Omega)$, де $M(x, u) = |u|^{q(x)}$. У цьому випадку норма $||\cdot; L^{q(x)}(\Omega)||$ збігається з нормою Люксембурга в цьому просторі. Крім цього $||\cdot; L^{q(x)}(\Omega)||$ є звичайною нормою в просторі $L^q(\Omega)$ при $q(x) = \text{const}$.

Ввівши функціонал $\rho_p(u, Q_{0,T}) = \int_{Q_{0,T}} |u(x,t)|^{p(x)} dxdt$, аналогічно, як і $L^{p(x)}(\Omega)$ визначимо простір $L^{p(x)}(Q_{0,T})$.

Узагальненим простором Соболева $W^{k,q(x)}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ називають множину всіх функцій $f \in L^{q(x)}(\Omega)$, похідні яких до порядку k включно належать до простору $L^{q(x)}(\Omega)$. Норму цього простору задають так:

$$||f; W^{k,q(x)}(\Omega)|| = \sum_{|\alpha|\leqslant k} ||D^\alpha f; L^{q(x)}(\Omega)||.$$

Вводять також простір $W_0^{k,q(x)}(\Omega)$, як замикання $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою простору $W^{k,q(x)}(\Omega)$. При наведених умовах на q простори $W^{k,q(x)}(\Omega)$ теж є банаховими, сепарабельними та рефлексивними.

Для функції $p \in \mathcal{P}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, яка задовольняє (2) зі сталою $p_1 > 2$, в статті [2] методом Гальоркіна доведено існування розв'язку задачі

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_{x_i}|^{p(x)-2} u_{x_i}\right) = f(x,t), u|_{t=0} = u_0, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_{0,T}} = 0$$

де $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in [V_0(Q_{0,T})]^* \cap L^{p_1}(0,T; W_0^{1,p(x)}(\Omega))$ та деяких додаткових умовах на функцію $p(x)$. Тут $V_0(Q_{0,T})$ – простір функцій $u : (0,T) \to W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ з нормою $||u; V_0(Q_{0,T})|| = \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i}; L^{p(x)}(Q_{0,T})||$. Розв'язок отримано в класі функцій $V_0(Q_{0,T}) \cap L^{p_1}(0,T; W_0^{1,p(x)}(\Omega))$. В [2] втановлена однозначна розв'язність цієї задачі, а також задачі з початковою умовою для одного сильно нелінійного рівняння вищого порядку. В статті [3] за допомогою методу Роте отримано умови існування та єдиності досить сильного узагальненого розв'язку аналогічної задачі для іншого рівняння вищого порядку за умови, що коефіцієнти його головної частини не залежать від t.

Серед задач для рівнянь та систем параболічного типу добре обумовлених математично і таких, що мають фізичний сенс, певне місце займають задачі без початкових умов, якими є, зокрема, нерівності з виродженням на деякій гіперплощині (нехай для визначеності на $t = 0$), чи задачі в областях $Q_- = \Omega \times (-\infty, T)$. У цьому випадку початкові умови замінюються умовами на поведінку розв'язку при $t \to +0$ чи $t \to -\infty$. Для лінійних рівнянь та систем в області Q_- ця поведінка визначається функцією $e^{\alpha t}$ ([4]), а для рівнянь, вироджених при $t = 0$ – функцією t^β ([5]), де сталі α, β залежать від коефіцієнтів задачі.

Для рівняння вигляду $u_t - \Delta u + |u|^{p-2}u = f$ та його узагальнень при $1 < p \leqslant 2$ результати є аналогічними як і для лінійних рівнянь. Проте при $p > 2$ існування та єдиність розв'язку задачі без початкових умов для вказаного рівняння не залежить від поведінки розв'язку при $t \to -\infty$ [6]. У працях [7] – [11] аналогічні результати отримано для параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов. Зокрема в [11] розглянуто параболічну варіаційну нерівность з виродженням, яка відповідає випадку $N = 1$, $q = \mathrm{const}$, $1 < q \leqslant 2$ в (1). Параболічні варіаційні нерівності без початкових умов в класах обмежених, періодичних та майже періодичних розв'язків (за часовою змінною t) досліджено в [12], [13].

Задача без початкових умов для рівняння з нелінійністю типу $q(x) \geqslant 2$ біля похідних за просторовими змінними досліджена в [14]. Параболічні варіаційні нерівності без початкових умов, які містять нелінійні члени зі степенями $p(x)$, $1 < p(x) \leqslant 2$ біля похідних за просторовими змінними та $q(x)$ біля самої функції u розглянуто в [15].

Повернемось до розгляду нерівності (1). Введемо таке позначення: якщо $u = \mathrm{colon}(u_1, \ldots, u_N)$, то

$$\widehat{u}_l = \mathrm{colon}(u_1, \ldots, u_l), \ \ \widehat{u}^l = \mathrm{colon}(u_{l+1}, \ldots, u_N),$$

де $1 \leqslant l \leqslant N$. Тепер від матриць Φ, A_{ij}, B_i, $i,j = \overline{1,n}$, C, G вимагатимемо виконання таких умов: $G = \mathrm{diag}(g_1, \dots, g_N)$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} B_i^1 & B_i^2 \\ B_i^3 & B_i^4 \end{pmatrix},$$

де Φ_1, B_i^1 – квадратні матриці розмірів $l \times l$, E – одинична матриця;

(Φ): Φ_1 – симетрична матриця, елементи якої належать до простору $C^1(\overline{Q}_{0,T})$; для деякого наперед заданого числа $t_0 \in (0,T]$ виконуються оцінки

$$\varphi(t)|\xi|^2 \leqslant (\Phi_1(x,t)\xi,\xi) \leqslant \varphi(t)\varphi_0(t)|\xi|^2, \; \varphi_1(t)\varphi'(t)|\xi|^2 \leqslant (\Phi_{1,t}(x,t)\xi,\xi) \leqslant \varphi_2(t)\varphi'(t)|\xi|^2$$

майже для всіх $x \in \Omega$ і для всіх $t \in (0,t_0]$, $\xi \in \mathbb{R}^l$, де $\varphi \in C^1([0,t_0])$, φ_0, φ_1, $\varphi_2 \in L^\infty(0,t_0)$; $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$, $\varphi'(t) > 0$ при $t \in (0,t_0]$, φ' – зростає на $[0,t_0]$; існують сталі $\mu_0 \in (0,1]$, $\widetilde{\varphi}_0, \widetilde{\varphi}_2 < \infty$ такі, що

$$\varphi(t) \geqslant \mu_0 t\varphi'(t), \;\; \varphi_0(t) \geqslant 1, \;\; |\varphi_2(t)| \leqslant \widetilde{\varphi}_2, \;\; |\varphi_0(t)/\varphi_2(t)| \leqslant \widetilde{\varphi}_0$$

при $t \in (0,t_0]$; в області $Q_{t_0,T}$ виконується умова $(\Phi_1(x,t)\xi,\xi) \geqslant \varphi_3|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^l$, $\varphi_3 = \mathrm{const}$, $\varphi_3 > 0$;

(A): елементи матриць A_{ij} належать до простору $L^\infty(Q_{0,T})$; $A_{ij}(x,t) = A_{ji}(x,t)$, $i,j = \overline{1,n}$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x,t)\xi^i, \xi^j) \geqslant a_0 \sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^2, \;\; a_0 > 0,$$

майже скрізь в $Q_{0,T}$ і для всіх $\xi^i \in \mathbb{R}^N$, $i = \overline{1,n}$, $a_0 = \mathrm{const}$;

(B): елементи матриць B_i, $i = \overline{1,n}$ належать до простору $L^\infty(Q_{0,T})$;

$$b_0 = \sup_{(x,t)\in Q_{0,t_0}} \max\Big\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{||B_i^1(x,t);M||^2}{\varphi_2(t)\varphi'(t)}, \; \sum_{i=1}^{n} \frac{||B_i^2(x,t);M||^2}{\varphi_2(t)\varphi'(t)}, \; \sum_{i=1}^{n} ||B_i^3(x,t);M||^2, \; \sum_{i=1}^{n} ||B_i^4(x,t);M||^2 \Big\};$$

(C): елементи матриці C належать до простору $L^\infty(Q_{0,T})$, $(C(x,t)\xi,\xi) \geqslant c_0|\widehat{\xi}_l|^2\varphi'(t)\varphi_2(t) + \widetilde{c}_0|\widehat{\xi}^l|^2$ майже скрізь в Q_{0,t_0} і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$; в області $Q_{t_0,T}$ виконується оцінка $(C(x,t)\xi,\xi) \geqslant c_1|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$, $c_1 > 0$, $c_0, \widetilde{c}_0, c_1 = \mathrm{const}$;

(G): $g_j \in L^\infty(Q_{0,T})$, $g_j(x,t) \geqslant g_0 > 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$, $j = \overline{1,N}$, $g_0 > 0$, $g_0 = \mathrm{const}$.

Позначимо для зручності $\alpha_0 = 2(a_0c_0 - b_0)/a_0$, $\widetilde{\alpha}_0 = 2(a_0\widetilde{c}_0 - b_0)/a_0$.

Зауваження 1. Якщо φ взята з умови (Φ), то $\mu_0 t\varphi'(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant t\varphi'(t)$, $t \in (0,t_0]$. Дійсно з теореми Лагранжа та умови (Φ) отримаемо, що

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(t^*)(t-0) = \varphi'(t^*)t \leqslant t\varphi'(t), \;\; 0 \leqslant t^* \leqslant t \leqslant t_0.$$

Використовуючи стандартні перетворення можна довести таку лему.

Лема 1. *Нехай функція* $y(t)$ *– невід'ємна, неспадна, абсолютно неперервна на* $[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$. *Якщо* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t)y(t)\Big|_{t=0}^{t=t_2} + \alpha \int_{t_1}^{t_2} \varphi'(t)y(t)dt \leqslant 0 \ \textit{для довільних } t_1, t_2 \in [a,b],$$

то для довільного $t_0 \in (a,b)$ *матимемо* $\int_{t_0}^{\tau} \varphi'(t)y(t)dt \leqslant \int_{t_0}^{\tau} \varphi'(t)z(t)dt$, *а у випадку* $\alpha \leqslant 0$ *одержимо* $y(\tau) \leqslant z(\tau)$, *де* $z(\tau) = \varphi^{-1-\alpha}(\tau)\varphi^{1+\alpha}(t_0)y(t_0)$, $\tau \in [t_0, b]$.

Для доведення теорем існування та єдиності розв'язку нерівності (1) нам буде потрібно такі твердження, доведення яких ми не приводимо за браком місця.

Твердження 1. *Нехай* f *– деяка функція. Тоді*

1) Якщо $0 < \rho_p(f,\Omega) \leqslant C_1 < +\infty$, *то* $||f; L^{p(x)}(\Omega)|| \leqslant \max\{C_1^{1/p_2}, C_1^{1/p_1}\}$.

2) Якщо $0 < ||f; L^{p(x)}(\Omega)|| \leqslant C_2 < +\infty$, *то* $\rho_p(f,\Omega) \leqslant \max\{C_2^{p_1}, C_2^{p_2}\}$.

Твердження 2. $L^{q_2}(0,T; L^{q(x)}(\Omega)) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}(Q_{0,T}) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q_1}(0,T; L^{q(x)}(\Omega))$, *де символ* $\hookrightarrow\hookrightarrow$ *означає неперервне та щільне вкладення.*

Відомо, що функції з просторів Лебега є неперервними в середньому. З теореми 2.10 [1, с. 602] випливає, що функції з узагальнених просторів Лебега в загальному випадку такою властивістю не володіють. Наведемо приклад, коли така властивість є.

Твердження 3. *Якщо* $f \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, *то для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta_1 > 0$ *таке, що для всіх* $\delta \in (0,\delta_1)$: $||f(x,t+\delta) - f(x,t); L^{p(x)}(Q_{0,T})|| < \varepsilon$.

Твердження 4. *Якщо* $u \in L^{p(x)}(Q_{0,T})$, $u_0 \in L^{p(x)}(\Omega)$, *то* $u_\eta \xrightarrow[\eta\to+0]{} u$ *слабко в просторі* $L^{p(x)}(Q_{0,T})$, *де* u_η *– диференційовний майже скрізь на* $[0,T]$, $u_\eta \in C([0,T];B)$ *(див. [16., с. 153]) єдиний розв'язок задачі:* $\eta u_{\eta t} + u_\eta = u$, $u_\eta(0) = u_0$, $\eta > 0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (Φ) – (G). *Тоді нерівність (1) не може мати більше одного розв'язку, який задовольняє умову*

$$\lim_{t\to+0} \varphi^{\omega}(t) \int_{\Omega} (\Phi(x,t)u(x,t), u(x,t))dx = 0$$

зі сталою

$$\omega = \begin{cases} \gamma, & \alpha_0 - 1 \leqslant 0,\ \widetilde{\alpha}_0 \leqslant 0, \\ (\alpha_0 - 1)\widetilde{\varphi}_2, & \alpha_0 - 1 \leqslant 0,\ \widetilde{\alpha}_0 > 0, \qquad \gamma < (\alpha_0 - 1)\widetilde{\varphi}_2. \\ 0, & \alpha_0 - 1 > 0, \end{cases}$$

Доведення. Нехай u^1, u^2 – розв'язки нерівності (1). Використавши твердження 4 отримаємо оцінку

$$\int_{\Omega} (\Phi(u^1 - u^2), u^1 - u^2)dx\Big|_{t_1}^{t_2} + 2\int_{t_1}^{t_2} \langle A(t)u^1(t) - A(t)u^2(t), u^1(t) - u^2(t)\rangle dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (\Phi_t(u^1-u^2), u^1-u^2)dxdt, \tag{3}$$

де сім'я операторів $A(t) : V \to V^*$, $t \in (0,T)$ визначена рівністю

$$\langle A(t)u, v\rangle = \int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}u_{x_i}, v_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n}(B_i u_{x_i}, v) + (Cu, v) + \sum_{j=1}^{N} g_j|u_j|^{q(x)-2}u_j v_j\right]dx,$$

для довільних $u, v \in V$, $t \in (0,T)$.

З умови **(B)** випливає, що для всіх $\xi_1,\dots,\xi_n$, $\eta \in \mathbb{R}^N$ виконується оцінка

$$\sum_{i=1}^{n}(B_i(x,t)\xi_i, \eta) \leqslant \frac{b_0\gamma_1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\widehat{\xi}_{i,l}|^2 + \frac{b_0\gamma_1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\widehat{\xi}_i^l|^2 + \frac{1}{\delta_0}|\widehat{\eta}_l|^2\varphi_2(t)\varphi'(t) + \frac{1}{\delta_1}|\widehat{\eta}^l|^2, \tag{4}$$

де $(x,t) \in Q_{0,t_0}$, для довільних $\gamma_1, \delta_0, \delta_1 > 0$ таких, що $\delta_0 + \delta_1 = \gamma_1$.

Використавши (4) з $\gamma_1 = 2a_0/b_0$, $\delta_0 = \delta_1 = \gamma_1/2$, одержимо оцінку

$$\langle A(t)u - A(t)v, u-v\rangle \geqslant \int\limits_{\Omega}\left[\left(a_0 - \frac{b_0\gamma_1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i} - v_{x_i}|^2 + \left(c_0 - \frac{2}{\gamma_1}\right)|\widehat{u}_l - \widehat{v}_l|^2\varphi_2\varphi' + \right.$$

$$\left. + \left(\widetilde{c}_0 - \frac{2}{\gamma_1}\right)|\widehat{u}^l - \widehat{v}^l|^2\right]dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[\alpha_0\varphi_2(t)\varphi'(t)|\widehat{u}_l - \widehat{v}_l|^2 + \widetilde{\alpha}_0|\widehat{u}^l - \widehat{v}^l|^2\right]dx$$

для довільних $u, v \in V$, $t \in (0, t_0)$.

Позначимо $u = u^1 - u^2$. Тоді для $t_1, t_2 \in (0, t_0]$ з (3) та попередньої оцінки матимемо

$$\int\limits_{\Omega_t}(\Phi u, u)dx\Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{Q_{t_1,t_2}}[(\alpha_0 - 1)\varphi_2\varphi'|\widehat{u}_l|^2 + \widetilde{\alpha}_0|\widehat{u}^l|^2]dxdt \leqslant 0. \tag{5}$$

Розглянемо можливі випадки.

Нехай спочатку $\alpha_0 - 1 \leqslant 0$. Тоді з умови (Φ) та зауваження 1, після певних перетворень отримаємо, що $y(t)|_{t_1}^{t_2} + \omega\int_{t_1}^{t_2}\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}y(t)dt \leqslant 0$ для довільних $t_1, t_2 \in (0, \widetilde{t}]$, де $\omega \leqslant 0$ визначено в умовах теореми, $y(t) = \int_\Omega(\Phi u, u)dx$, $t \in (0, \widetilde{t})$, $\widetilde{t} \in (0,T)$ – досить мале фіксоване число. Тоді з [9, с. 60] одержимо $\varphi(t)y(t)|_{t_1}^{t_2} + (\omega - 1)\int_{t_1}^{t_2}\varphi'(t)y(t)dt \leqslant 0$ для довільних $t_1, t_2 \in (0, \widetilde{t}]$, і з леми 1 та умов теореми

$$\varphi^\omega(t)y(t) \leqslant \varphi^\omega(t_0)y(t_0) \xrightarrow[t_0 \to +0]{} 0.$$

Отже, $y = 0$ майже скрізь на $(0, \widetilde{t})$.

У випадку $\alpha_0 - 1 > 0$ аналогічний результат отримаємо зразу з (5). Отже, $u^1 = u^2$ майже скрізь в $Q_{0,\widetilde{t}}$. Нескладно показати, що $u^1 = u^2$ майже скрізь в $Q_{\widetilde{t},T}$.

Теорема доведена.

Нам буде потрібна і така лема, доведення якої ми опускаємо.

Лема 2. *Нехай $y = y(t)$ – абсолютно неперервна, невід'ємна, неспадна на $[0,T]$ функція, $y(0) = 0$; $h = h(t)$ – така функція, що $h \geqslant 0$, $t^\beta h \in L^1(0,T)$, $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \xi_0 \leqslant \xi_2$. Якщо функція y для всіх $\beta \in \mathbb{R}$ і всіх $\tau \in (0,T]$ задовольняє оцінку*

$$\xi_0 \tau y'(\tau) + (\xi_1 - \xi_2\beta) y(\tau) \leqslant \int\limits_0^\tau h(t) t^\beta dt,$$

то існують сталі $C_1 = C_1(\beta)$, $C_1 \geqslant 0$ та $\zeta = \zeta(\beta)$, $\zeta \leqslant \xi_1/\xi_2$ такі, що $y(\tau) \leqslant C_1 \int_0^\tau h(t) t^\zeta dt$, для всіх $\tau \in (0,T]$.

Введемо простори: $[H_r^1(Q_{0,t_1})]^N$ – замикання простору $[C^\infty(\overline{Q}_{0,t_1})]^N$ за нормою

$$||v; [H_r^1(Q_{0,t_1})]^N|| = \left(\int\limits_{Q_{0,t_1}} \left[\sum_{i=1}^n |v_{x_i}(x,t)|^2 + r(t)|\widehat{v}_l(x,t)|^2 + |\widehat{v}^l(x,t)|^2 \right] dxdt \right)^{1/2},$$

$[L_r^\infty(Q_{0,t_1})]^N$ – замикання простору $[C^\infty(\overline{Q}_{0,t_1})]^N$ за нормою

$$||u; [L_r^\infty(Q_{0,t_1})]^N|| = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in (0,t_1)} \left(\int\limits_\Omega (r(t)|\widehat{v}_l(x,t)|^2 + |\widehat{v}^l(x,t)|^2) dx \right)^{1/2};$$

$$C_r([0,t_1], H_1) = \left\{ v \, : \, \int\limits_\Omega (q(t)|\widehat{v}_l(x,t)|^2 + |\widehat{v}^l(x,t)|^2) dx \in C([0,t_1]) \right\},$$

де $t_1 \in (0,T]$, $r(t) \geqslant 0$, $t \in (0,t_1)$, $r(t) = 0$ на множині міри нуль з відрізка $[0,T]$. Простір $U_2(Q_{0,t_1}) = [H^1_{\varphi'\varphi_2}(Q_{0,t_1})]^N \cap [L^{q(x)}(Q_{0,t_1})]^N$ розглядатимемо з нормою

$$||u; U_2(Q_{0,t_1})|| = ||u; [H^1_{\varphi'\varphi_2}(Q_{0,t_1})]^N|| + ||u; [L^{q(x)}(Q_{0,t_1})]^N||, \;\; t_1 \in (0,T].$$

Використовуючи стандартну методику доводимо повноту цих просторів.

Теорема 2. *Нехай виконуються всі умови теореми 1 і множина K є така, що $\Phi^{1/2}(t) w \in K$, $t \in (0,T)$ тоді і тільки тоді, коли $w \in K$; елементи матриць A_{ij} , B_i , C , G , $i,j = \overline{1,n}$ належать до простору $C([0,T]; L^\infty(\Omega))$;*

$$\mathcal{F}_\beta(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\frac{|\widehat{F}_l(x,t)|^2}{\varphi'(t)\varphi_2(t)} + |\widehat{F}^l(x,t)|^2 \right] t^\beta dxdt, \;\; \tau \in (0,t_0].$$

де

$$\beta < \min\{(\alpha_0 - 1)\theta_1/2, \;\; 0\}, \;\; \theta_1 = \begin{cases} 1/\widetilde{\varphi}_0, & \alpha_0 - 1 > 0, \\ \widetilde{\varphi}_2/\mu_0, & \alpha_0 - 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Якщо $\mathcal{F}_\beta(t_0) < +\infty$ і $F \in L^2(Q_{t_0,T})$, то існує розв'язок u варіаційної нерівності (1) такий, що для деякого $\widetilde{t} \in (0,t_0)$ $u \in U_2(Q_{0,\widetilde{t}}) \cap C_\varphi([0,\widetilde{t}], H_1)$ і виконуються оцінки

$$\int\limits_\Omega [\varphi(\tau)|\widehat{u}_l(x,\tau)|^2 + |\widehat{u}^l(x,\tau)|^2] \tau^\beta dx \leqslant C_2 \mathcal{F}_\beta(\tau),$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 + \varphi'(t)\varphi_2(t)|\widehat{u}_l|^2 + |\widehat{u}^l|^2 + \sum_{j=1}^{N} |u|^{q(x)}\right] t^\beta dxdt \leqslant C_2\mathcal{F}_\beta(\tau),$$

де стала C_2 *не залежить від* u , F , $\tau \in (0,\widetilde{t})$.

Доведення. Розглянемо в $Q_{t_1,T}$, $t_1 \in (0,T)$ варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,\tau}} \left[(\Phi v_t, v-u) + \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}u_{x_i}, v_{x_j} - u_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n}(B_i u_{x_i}, v-u) + \right.$$
$$\left. +(G\widetilde{u} + Cu - F_{t_1}, v-u) + \frac{1}{2}(\Phi_t(v-u), v-u)\right] dxdt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} (\Phi(x,\tau)(v(x,\tau) - u(x,\tau)), v(x,\tau) - u(x,\tau))dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} (\Phi(x,t_1)v(x,t_1), v(x,t_1))dx \tag{6}$$

для довільного $\tau \in (t_1,T]$ та довільного $v \in W_{t_1,T} \cap C([t_1,T];H_1)$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (t_1,T)$, де

$$F_{t_1}(x,t) = \begin{cases} F(x,t), & (x,t) \in Q_{t_1,T}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{0,t_1}. \end{cases}$$

Можна показати, що існує єдина функція $u \in U_1(Q_{t_1,T}) \cap C([t_1,T];H_1)$, $u(t_1) = 0$, $u(t) \in K$ майже для всіх $t \in (t_1,T)$ яка є розв'язком нерівності (6).

Вибираючи $t_1 = T/2, T/3, .., T/k, ..$, отримаємо послідовність функцій $\{u^k\}_{k=2}^{\infty}$, які є розв'язками нерівності (6), $u^k(T/k) = 0$. Продовжимо кожну функцію u^k нулем в область $Q_{0,T/k}$. Враховуючи неперервність за t коефіцієнтів нерівності (6), за допомогою теореми Асколі – Арцела та тверджень 1 – 3 можна показати, що функції u^k задовольняють нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[(\Phi v_t, v-u) + \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}u^k_{x_i}, v_{x_j} - u^k_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n}(B_i u^k_{x_i}, v-u^k) + (Cu^k + G\widetilde{u}^k - F_{T/k}, v- \right.$$
$$\left. -u^k) + \left(\left(\frac{1}{2}\Phi_t + \frac{\beta}{2t}\Phi\right)(v-u^k), v-u^k\right)\right] t^\beta dxdt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t} (\Phi(v-u^k), v-u^k)t^\beta dx\Big|_{t_1}^{t_2}, \tag{7}$$

для довільних $t_1, t_2 \in (0,T]$, $t_1 < t_2$ для довільної функції $v \in C((0,T];H)$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$, $v \in W_{t_0,T}$ для $t_0 \in (0,T)$, де $\beta \in \mathbb{R}$.

Взявши в (7) $v = 0 \in K$, $t_1 = T/k$, $t_2 = \tau$, де $\tau \in (t_1,T]$ аналогічно, як (5) матимемо

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(\tau)|\widehat{u}^k_l(x,\tau)|^2\tau^\beta dx + \int\limits_{\Omega} |\widehat{u}^{k,l}(x,\tau)|^2\tau^\beta dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[2\varkappa_1 \sum_{i=1}^{n} |u^k_{x_i}|^2 t^\beta + \right.$$

$$+[(\alpha_0-1-\varkappa_2)\varphi'(t)\varphi_2(t)t^\beta-2\beta\varphi(t)\theta_2(t)t^{\beta-1}]\cdot|\widehat{u}_l^k|^2+$$

$$+[(\widetilde{\alpha}_0-\varkappa_3)t^\beta-2\beta t^{\beta-1}]\cdot|\widehat{u}^{k,l}|^2+2g_0\sum_{j=1}^N|u_j^k|^{q(x)}t^\beta\Big]dxdt\leqslant C_3\mathcal{F}_\beta(\tau), \qquad (8)$$

де $\varkappa_1,\varkappa_2,\varkappa_3>0$ – як завгодно малі числа, стала C_3 не залежить від k,

$$\theta_2(t)=\begin{cases}1, & \beta\leqslant 0,\\ \varphi_0(t), & \beta>0.\end{cases}$$

Зробимо ряд оцінок:
при $\alpha_0-1>0$ і досить малому $\varkappa_2>0$ з (Φ) та зауваження 1:

$$(\alpha_0-1-\varkappa_2)\varphi'(t)\varphi_2(t)t^\beta=(\alpha_0-1-\varkappa_2)t\varphi'(t)\varphi_2(t)\varphi_0(t)t^{\beta-1}/\varphi_0(t)\geqslant$$
$$\geqslant(\alpha_0-1-\varkappa_2)\varphi(t)t^{\beta-1}/\widetilde{\varphi}_0;$$

при $\alpha_0-1\leqslant 0$:

$$(\alpha_0-1-\varkappa_2)\varphi'(t)\varphi_2(t)t^\beta=(\alpha_0-1-\varkappa_2)\mu_0t\varphi'(t)\varphi_2(t)t^{\beta-1}/\mu_0\geqslant$$
$$\geqslant(\alpha_0-1-\varkappa_2)\widetilde{\varphi}_2\varphi(t)t^{\beta-1}/\mu_0;$$

при $\widetilde{\alpha}_0>0$ і досить малому $\varkappa_3>0$: $(\widetilde{\alpha}_0-\varkappa_3)t^\beta\geqslant 0$;
при $\widetilde{\alpha}_0\leqslant 0$: $(\widetilde{\alpha}_0-\varkappa_3)t^\beta\geqslant(\widetilde{\alpha}_0-\varkappa_3)\widetilde{t}t^{\beta-1}$ для всіх $t\in(0,\widetilde{t})$, $\widetilde{t}\leqslant t_0$;
при $\beta>0$: $\theta_2(t)=\varphi_0(t)=\varphi_0(t)\varphi_2(t)/\varphi_2(t)\leqslant\widetilde{\varphi}_0\widetilde{\varphi}_2$;
при $\beta\leqslant 0$: $\theta_2(t)=1$.

Отже, для $y(\tau)=\int_{Q_{0,\tau}}\varphi(t)t^{\beta-1}|\widehat{u}_l^k(x,t)|^2dxdt$, $z(\tau)=\int_{Q_{0,\tau}}t^{\beta-1}|\widehat{u}^{k,l}(x,t)|^2dxdt$ з (8) отримаємо оцінку

$$\tau(y'(\tau)+z'(\tau))+[(\alpha_0-1-\varkappa_4)\theta_1-2\theta_3\beta]y(\tau)+[(\widetilde{\alpha}_0-\varkappa_5)\theta_4-2\beta]z(\tau)\leqslant C_3\mathcal{F}_\beta(\tau),$$

де $\tau\in(0,\widetilde{t})$,

$$\theta_3=\begin{cases}\widetilde{\varphi}_0\widetilde{\varphi}_2, & \beta>0,\\ 1, & \beta\leqslant 0,\end{cases}\quad \theta_4=\begin{cases}0, & \widetilde{\alpha}_0>0,\\ \widetilde{t}, & \widetilde{\alpha}_0\leqslant 0,\end{cases}$$

$\widetilde{t}\in(0,t_0)$ – як завгодно мале число. Тоді

$$\tau(y(\tau)+z(\tau))'+\min\{(\alpha_0-1-\varkappa_4)\theta_1-2\theta_3\beta,(\widetilde{\alpha}_0-\varkappa_5)\theta_4-2\beta\}(y(\tau)+z(\tau))\leqslant C_3\mathcal{F}_\beta(\tau),$$

$\tau\in(0,\widetilde{t})$. Тому з леми 2 отримаємо, що $y(\tau)+z(\tau)\leqslant C_4\mathcal{F}_\beta(\tau)$, де β задовольняє умову $\beta<\min\{(\alpha_0-1-\varkappa_4)\theta_1/(2\theta_3),\ (\widetilde{\alpha}_0-\varkappa_5)\theta_4/2\}$. Числа $\varkappa_4,\varkappa_5,\widetilde{t}>0$ виберем такими малими, щоб β задовольняло умови теореми. Тоді з (8) отримаємо оцінки

$$\int_\Omega[\varphi(\tau)|\widehat{u}_l^k(x,\tau)|^2+|\widehat{u}^{k,l}(x,\tau)|^2]\tau^\beta dx\leqslant C_5\mathcal{F}_\beta(\tau),$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^k|^2 + \varphi_2\varphi' |\widehat{u}_l^k|^2 + |\widehat{u}^{k,l}|^2 + \sum_{j=1}^{N} |u_j^k|^{q(x)}\right] t^\beta dxdt \leqslant C_5 \mathcal{F}_\beta(\tau), \qquad (9)$$

де стала C_5 не залежить від k, $\tau \in (0, \widetilde{t}]$. Отже, існує підпослідовність послідовності $\{u^k\}_{k=2}^{\infty}$ (збережемо для цієї підпослідовності позначення $\{u^k\}_{k=2}^{\infty}$) така, що

$$u^k t^{\beta/2} \xrightarrow[k\to\infty]{} ut^{\beta/2} \ \ * - \text{ слабко в } [L_\varphi^\infty(Q_{0,\widetilde{t}})]^N, \text{ та слабко в } U_1(Q_{0,\widetilde{t}}).$$

Нехай $k, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $w = u^k - u^m$, $f = F_{T/k} - F_{T/m}$. Тоді з того, що u^k, u^m задовольняють (7) і $u^k(t)$, $u^m(t) \in K$ для майже всіх $t \in (0, T)$, як розв'язки відповідних задач, продовжені нулем до $t = 0$, аналогічно, як в нерівність (3), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} (\Phi(x,t)w, w)t^\beta dx \Big|_{t_1}^{t_2} + 2\int\limits_{t_1}^{t_2} \langle A(t)u^k(t) - A(t)u^m(t), u^k(t) - u^m(t)\rangle t^\beta dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (f, w)t^\beta dxdt + \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} [(\Phi_t w, w)t^\beta + \beta(\Phi w, w)t^{\beta-1}]dxdt.$$

Нехай $t_1 = \min\{T/k, T/m\}$, $t_2 = \tau$, де $\tau \in (t_1, T)$. Тоді з попередньої нерівності аналогічно, як (9) матимемо оцінки

$$\int\limits_{\Omega} (\varphi(\tau)|\widehat{w}_l(x,\tau)|^2 + |\widehat{w}^l(x,\tau)|^2)\tau^\beta dx \leqslant C_6 \mathcal{F}_\beta^{k,m}(\tau),$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^{n} |w_{x_i}|^2 + \varphi_2\varphi' |\widehat{w}_l|^2 + |\widehat{w}^l|^2\right] t^\beta dxdt \leqslant C_6 \mathcal{F}_\beta^{k,m}(\tau), \ \ \tau \in (0, \widetilde{t}],$$

де стала C_6 не залежить від k, m,

$$\mathcal{F}_\beta^{k,m}(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\frac{|\widehat{F}_{T/k,l}(x,t) - \widehat{F}_{T/m,l}(x,t)|^2}{\varphi'(t)\varphi_2(t)} + |\widehat{F}_{T/k}^l(x,t) - F_{T/m}^l(x,t)|^2\right] t^\beta dxdt \xrightarrow[k,m\to\infty]{} 0.$$

Отже, з критерію Коші збіжності послідовності $\{u^k\}_{k=2}^{\infty}$ матимемо

$$u^k t^{\beta/2} \xrightarrow[k\to\infty]{} ut^{\beta/2} \quad \text{в } C_\varphi([0, \widetilde{t}]; H_1) \text{ та сильно в } U_1(Q_{0,\widetilde{t}}).$$

Оскільки $u^k(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0, T)$, $k \in N \setminus \{1\}$ та K – замкнена множина в V, то $u(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0, T)$. Тоді спрямуємо в (7) з $\beta = 0$ $k \to \infty$ і отримаємо, що функція u є розв'язком варіаційної нерівності (1) в області $Q_{0,\widetilde{t}}$. Тоді розглянувши в $Q_{\widetilde{t}/2,T}$ варіаційну нерівність з початковою умовою $\widetilde{u}(x,\widetilde{t}/2)=u(x,\widetilde{t}/2)$ отримаємо її розв'язок – функцію $\widetilde{u}=\widetilde{u}(x,t)$. Отже, функція

$$w(x,t)=\begin{cases} u(x,t), & (x,t)\in Q_{0,\widetilde{t}},\\ \widetilde{u}(x,t), & (x,t)\in Q_{\widetilde{t}/2,T}.\end{cases}$$

($u(x,t)=\widetilde{u}(x,t)$ при $(x,t)\in Q_{\widetilde{t}/2,\widetilde{t}}$) є розв'язком варіаційної нерівності (1).

Зауваження 2. Умови на функцію φ з (Φ) виконуються зокрема для $\varphi(t)=t^{\alpha}$, $\alpha\geqslant 1$.

Зауваження 3. Умови (Φ) – (**C**) виконуються, зокрема, для таких матриць: $\Phi=\mathrm{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$, $A_{ij}=\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_N)$, $B_i=0$, $i,j=\overline{1,n}$, $C=\mathrm{diag}(c_1,..,c_N)$, де $\varphi_j=\varphi(t)$, $a_j=a_0$, $j=\overline{1,N}$, $c_j=c_0$, $j=\overline{1,l}$, $c_j=\widetilde{c}_0$, $j=\overline{l,N}$, а також виконуються умови $a_0,c_0,\widetilde{c}_0=\mathrm{const}$, $a_0>0$; $\varphi\in C^1([0,t_0])$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)>0$ при $t\in(0,T]$, існує число $t_0\in(0,T)$ і стала $\mu_0\in(0,1]$ такі, що $\varphi'(t)>0$ при $t\in(0,t_0]$, φ' – зростає на $[0,t_0]$, $\varphi(t)\geqslant\mu_0 t\varphi'(t)$ при $t\in(0,t_0]$.

При виконання умов зауваження 3 маємо, що $\alpha_0=2c_0$, $\widetilde{\alpha}_0=2\widetilde{c}_0$ і теореми 1 та 2 матимуть вигляд

ТЕОРЕМА $1'$. *Нехай виконуються умови зауваження 3. Тоді нерівність (1) не може мати більше одного розв'язку, який задовольняє умову*

$$\lim_{t\to+0}\varphi^{\omega}(t)\int_{\Omega}\left[\varphi(t)\sum_{j=1}^{l}|u_j(x,t)|^2+\sum_{i=l}^{N}|u_j(x,t)|^2\right]dx=0,$$

де

$$\omega=\begin{cases}\gamma, & c_0=(1-\varepsilon)/2,\ \widetilde{c}_0\leqslant 0,\\ -\varepsilon, & c_0=(1-\varepsilon)/2,\ \widetilde{c}_0>0,\\ 0, & c_0=(1+\varepsilon)/2,\end{cases}\qquad \gamma<-\varepsilon,\ \varepsilon>0.$$

ТЕОРЕМА $2'$. *Нехай виконуються умови зауваження 3,*

$$\mathcal{F}_{\beta}(\tau)=\int\limits_{Q_{0,\tau}}\left[\frac{1}{\varphi'(t)}\sum_{j=1}^{l}|F_j(x,t)|^2+\sum_{i=l}^{N}|F_j(x,t)|^2\right]t^{\beta}dxdt,\ \ \tau\in(0,t_0].$$

де

$$\beta<\min\{(2c_0-1)\theta_1/2,\ 0\},\ \ \theta_1=\begin{cases}1, & c_0=(1+\varepsilon)/2,\\ 1/\mu_0, & c_0=(1-\varepsilon)/2,\end{cases}\qquad \varepsilon>0.$$

Якщо $\mathcal{F}_{\beta}(t_0)<+\infty$ і $F\in L^2(Q_{t_0,T})$, то існує розв'язок u варіаційної нерівності (1), який задовольняє оцінки

$$\int\limits_{\Omega}\left[\varphi(\tau)\sum_{j=1}^{l}|u_j(x,\tau)|^2+\sum_{i=l}^{N}|u_j(x,\tau)|^2\right]\tau^{\beta}dx\leqslant C_2\mathcal{F}_{\beta}(\tau),$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}\left[\sum_{i=1}^{n}|u^k_{x_i}(x,t)|^2+\varphi'(t)\sum_{j=1}^{l}|u_j(x,t)|^2+\sum_{i=l}^{N}|u_j(x,t)|^2+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{N}|u^k(x,t)|^{q(x)}\Bigg]t^{\beta}dxdt \leqslant C_2\mathcal{F}_{\beta}(\tau),$$

де стала C_2 *не залежить від* u, F, $\tau \in (0,\widetilde{t})$.

Приклад 1. Якщо $N = 2$, $l = 1$, $u = (u_1, u_2)$, $\widehat{u}_l = u_1$, $\widehat{u}^l = u_2$ і нерівність (1) має вигляд

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\Bigg[\left(\left(\begin{pmatrix} t^{\alpha} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_{1t}\\ v_{2t}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} v_1-u_1\\ v_2-u_2\end{pmatrix}\right)\right)+\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}u_{x_i}, v_{x_j}-u_{x_j})+$$

$$+\left(\begin{pmatrix} |u_1|^{q(x)-2}u_1+\alpha c_0 t^{\alpha-1}u_1+t^{r/2}\\ |u_2|^{q(x)-2}u_2+\widetilde{c}_0u_2+t^{s/2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} v_1-u_1\\ v_2-u_2\end{pmatrix}\right)+\frac{\alpha}{2}t^{\alpha-1}|v_1-u_1|^2\Bigg]dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\begin{pmatrix} t^{\alpha} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1-u_1\\ v_2-u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} v_1-u_1\\ v_2-u_2\end{pmatrix}\right)dx\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2}, \qquad (10)$$

де $\widetilde{c}_0 > 0$, $\alpha > 1$, $c_0 \in \mathbb{R}$, то умови (Φ) – ($\mathbf{G}$) виконуються і $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \widetilde{\varphi}_0 = \widetilde{\varphi}_2 = 1$, $\mu_0 = 1/\alpha$, $\widetilde{\alpha}_0 = 2\widetilde{c}_0 > 0$, $\alpha_2 = 2c_0$. Тоді з теореми $1'$ випливає, що (10) не може мати більше одного розв'язку, який при $c_0 = (1-\varepsilon)/2$, $\varepsilon > 0$ задовольняє умову

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_{\Omega}[t^{\alpha-\varepsilon}|u_1(x,t)|^2+t^{-\varepsilon}|u_2(x,t)|^2]dx = 0$$

і при $c_0 = (1+\varepsilon)/2$, $\varepsilon > 0$ умову

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_{\Omega}[t^{\alpha}|u_1(x,t)|^2+|u_2(x,t)|^2]dx = 0. \qquad (11)$$

В теоремі $2'$ функція F_{β} матиме вигляд $F_{\beta}(\tau) = |\Omega|\cdot\int\limits_0^{\tau}[t^{r-\alpha+1}/\alpha+t^{s}]t^{\beta}dt < +\infty$, $\tau \in (0,t_0)$, і буде задовольняти умову $F_{\beta}(t_0) < +\infty$ при $s > -1-\beta$, $r > \alpha-2$.

У випадку $c_0 = (1-\varepsilon)/2$, $\varepsilon > 0$ отримуємо, що існує таке $\widetilde{\varkappa} > 0$, що $\beta = (\alpha_0-1)\theta_1/2-\widetilde{\varkappa} = -\varepsilon\alpha/2-\widetilde{\varkappa} = -\varepsilon+\varepsilon(1-\alpha/2)-\widetilde{\varkappa}$. Тоді у випадку $s > \varepsilon\alpha/2-1+\widetilde{\varkappa}$, $r > \alpha-2$ нерівність (10) має розв'язок $u = (u_1, u_2)$ і

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_{\Omega}[t^{\alpha-\varepsilon+\varepsilon(1-\alpha/2)-\widetilde{\varkappa}}|u_1(x,t)|^2+t^{-\varepsilon+\varepsilon(1-\alpha/2)-\widetilde{\varkappa}}|u_2(x,t)|^2]dx = 0.$$

У випадку $c_0 = (1+\varepsilon)/2$, $s > \widetilde{\varkappa}-1$, $r > \alpha-2$ нерівність (10) має розв'язок, який задовольняє умову (11).

Приклад 2. Аналогічно, як в [12] можна показати, що при $N = 1$, $X = H^1(\Omega)$, $K = \{v \in V : v \geqslant 0 \text{ на } \partial\Omega\}$, $A_{ij} = a$, $a = \text{const}$, $B_i = 0$, $i = \overline{1,n}$ то розв'язок варіаційної нерівності (1) є розв'язком задачі

$$\Phi(x,t)u_t+a\Delta u+C(x,t)u+G(x,t)|u|^{q(x)-2}u = F(x,t),$$

$$u \geqslant 0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu} \geqslant 0,\ u\frac{\partial u}{\partial\nu} = 0,\ \text{ на } \partial\Omega\times(0,T).$$

Список літератури

1. Kovacik O., Rakosnic J., *On spaces* $L^{p(x)}, W^{k,p(x)}$, Czechosl. Math. J. **41** (1991), no. 4, 592–618.
2. Самохин В.Н., *Об одном класе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации*, Дифференциальные уравнения **32** (1996), no. 5, 643 - 651.
3. Kovacik O., *Parabolic equations in generalized Sobolev spaces* $W^{k,p(x)}$, Fasciculi mathematici **25** (1995), 87 - 94.
4. Олейник О.А., Радкевич Е.В., *Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена – Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений*, Функциональный анализ и его приложения **8** (1974), no. 4, 59 – 70.
5. Калашников А.С., *Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка I, II*, Вестник Московского университета **2,3** (1971).
6. Бокало Н.М., *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений*, Труды семинара им. И.Г.Петровского **14** (1989), 3–44.
7. Лавренюк С.П., *Параболические вариационные неравенства без начальных условий*, Дифференциальные уравнения **32** (1996), no. 10, 1 – 5.
8. Лавренюк С. П., *Системи параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов з довільною поведінкою розв'язку на нескінченності*, Доп. НАН України **2** (1998), 40 – 43.
9. Bokalo M. M., *Well-posedness of problems without initial conditions for nonlinear parabolic variational inequalities*, Nonlinear boundary value problems (1998), no. 8.
10. Бугрій О. М., *Деякі параболічні варіаційні нерівності без початкових умов*, Вісник Львівського ун-ту **49** (1998), 113 – 121.
11. O. M. Buhrii, *Parabolic variational inequalities with degeneration*, Matematychni Studii **11**, no. 2.
12. Лионс Ж.- Л., *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, М.: Мир, 1972, p. 608.
13. Панков А. А., *Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений*, Киев: Наукова думка, 1985, p. 184.
14. Бокало М.М., Сікорський В.М., *Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації*, Вісник Львівського ун-ту **51** (1998), 85-99.
15. Бугрій О. М., Лавренюк С. П., *Системи параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації*, Український математичний журнал **53** (2001), no. 7, 867 – 878.
16. Гаєвський Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, М.: Мир, 1978, p. 336.

Львівський державний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1,
79602, м.Львів, Україна